

Entrenamientos Estatales 2018
TEORÍA DE NÚMEROS
Divisibilidad



Conceptos clave:

Divisibilidad: Diremos que a divide a b si existe un entero q tal que $b=a \cdot q$. Se escribe $a \mid b$.

Primos: Un número $p \neq 1$ se dice que es *primo* si los únicos números que lo dividen son 1 y p .

Compuestos: Un número es *compuesto* si no es primo.

Máximo común divisor: El m.c.d de a y b como su nombre lo dice es el máximo número $d > 0$ que cumple que $d \mid a$ y $d \mid b$. Se denota por (a,b) .

Mínimo común múltiplo: El m.c.m. de a y b es el mínimo número $D > 0$ que cumple que $a \mid D$ y $b \mid D$. Se denota por $[a,b]$.

Observación. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid b+c$ y $a \mid b-c$ ¿Por qué?

Ejercicios.

i) Indica cuáles afirmaciones son ciertas:

i) $-12 \mid 36$

ii) $5 \mid 2007$

iii) $1 \mid a$ para todo entero a .

iv) $0 \mid a$ para todo entero a .

v) $a \mid 0$ para todo entero a .

ii) ¿Para cuántos enteros positivos n se cumple que $n+2 \mid 36$?

iii) Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de las siguientes parejas de números: 36 y 24; 56 y 112; 108 y 369.

iv) Sea n número natural. ¿Cuánto vale $(n,n+1)$? , ¿y $(n,n+2)$?. En general ¿Cuánto vale $(n,n+p)$, para p número primo?

Teorema Fundamental de Aritmética. Todo número natural diferente de 1 puede ser representado de manera única (salvo orden) como un producto de números primos.

Ejemplo. $120=2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Ejercicios.

- Factoriza en primos los siguientes números: 660, 1573, 1200, 6916 y $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.
- En cada enunciado decide si es verdadero o falso:

i) 2 divide a $2^9 \cdot 3$

ii) 3 divide a $2^9 \cdot 3$

ii) 4 divide a $2^9 \cdot 3$

iv) 5 divide a $2^9 \cdot 3$

v) 6 divide a $2^9 \cdot 3$

vi) 7 divide a $2^9 \cdot 3$

vii) 8 divide a $2^9 \cdot 3$

viii) 9 divide a $2^9 \cdot 3$

Criterios de divisibilidad.

- Un número a es divisible entre 2 si y solo si a termina en 0, 2, 4, 6, u 8.
- Un número a es divisible entre 3 si y solo si la suma de los dígitos de a es divisible entre 3.
- Un número a es divisible entre 4 si y solo si el número formado entre las dos últimas cifras de a es múltiplo de 4.
- Un número a es divisible entre 5 si y solo si a termina en 0 o 5.
- Un número a es divisible entre 6 si y solo si a es divisible entre 2 y entre 3.
- Un número a es divisible entre 7 si y solo si el número que resulta de quitarle a a su último dígito y restarle el doble del último dígito es divisible entre 7. (Por ejemplo 161 es divisible entre 7 pues $16 - 2 \cdot 1 = 14$ es divisible entre 7; también 1673 es divisible entre 7 pues $167 - 2 \cdot 3 = 161$ es divisible entre 7)
- Un número a es divisible entre 8 si y solo si el número formado por las tres últimas cifras de a es múltiplo de 8.
- Un número a es divisible entre 9 si y solo si la suma de los dígitos de a es divisible entre 9.
- Un número a es divisible entre 10 si y solo si a termina en 0.

11. Un número a es divisible entre 11 si y solo si la diferencia de la suma de las cifras de a en posición impar menos la suma de las cifras de a en posición par es divisible entre 11. (Por ejemplo 82817053 es divisible entre 11 pues $(3+0+1+2)-(5+7+8+8)=-22$ que es divisible entre 11)

Problemas.

- Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falsa:
 - La suma de las cifras del número es 6.
 - Dos de las cifras del número son iguales.
 - El número es menor que 110.
 - El número es mayor que 40.
 - El número es primo.¿Cuál es el número de mi casa?
- ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos hay tal que el producto de sus dígitos es 2000?
- ¿Qué valor debe tener la cifra "M" en el número 5M8M para que sea divisible entre 2 y 3 a la vez?
- ¿Cuál es el menor número que cumple con las siguientes condiciones?
 - Tiene 2013 cifras (la cifra de hasta la izquierda es mayor que cero).
 - La suma de sus cifras es 2013.
 - Es múltiplo de 20.
- ¿Cuántos números de 10 dígitos que contienen sólo ceros y unos son divisibles entre 9? (El primer dígito tiene que ser uno).
- Se sabe que el número A77C es divisible entre 12. Si A y C son distintos, encuentra los posibles valores de A y C.
- Un número es llamado curioso si el producto de sus cifras es un divisor de 2007. ¿Cuántos números curiosos existen que sean menores a 2007?
- Entre los papeles del abuelo encontré que por 72 pavos pagó \$_67.9_ (la primera y última cifra se borraron con el tiempo). ¿Cuáles son los dígitos faltantes?
- ¿Cuántos polígonos regulares tienen ángulos internos cuya medida sea un número entero de grados?
- Se tiene que $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x + 9x = a$, donde a es un número que tiene todas sus cifras iguales. ¿Cuál es el mínimo valor que puede tomar a ?
- Encuentra todas los números naturales (x,y) que satisfacen la ecuación $x^2 - y^2 = 2007$.
Sugerencia: Acuérdate de como se factoriza el lado izquierdo
- Encuentra el máximo común divisor de todos los números pares de 6 dígitos que se forman usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente una vez.
- Prueba que si n es compuesto entonces tiene un divisor primo p tal que $p \leq \sqrt{n}$.
Nota. Este problema nos da un criterio para saber si un número es primo: Basta ver si es divisible por los primos menores o iguales que su raíz cuadrada. Por ejemplo 101 es primo, puesto que no es divisible entre los primos menores a 10: 2, 3, 5 y 7. Decide si los siguientes son primos o no: 91, 557, 1517, 1999, 2001, 2003, 2007, 2009, 2011, 2013, 2017.
- Encuentra el menor número que sea mayor a 2010 y que cumpla que no es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, pero sí entre 11.
- Un cuadrado de lado n , donde n es entero, es dividido en 25 cuadrados más chicos, de los cuales exactamente 24 tienen lado 1. Determina los posibles valores de n .
- Determinar todos los números N de 4 dígitos que tienen las siguientes propiedades:
 - N es divisible por 11
 - El producto de sus cifras es un cuadrado perfecto.
 - Algunas de sus cifras es 7.
 - Ninguna de sus cifras es cero.